**1.2. Случайные события  
  
1.2.1. События**

     Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).  
     ***Испытанием*** или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.  
     ***Случайным*** называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).  
     Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.  
     **Пример.** Бросание монеты – это испытание. Появление орла при бросании – событие.  
     Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.  
     Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.  
     **Пример.** Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.  
     Событие называется ***невозможным***, если оно не может произойти в результате данного испытания.  
     **Пример.** Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (небелые) шары, есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появления белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.  
     Далее случайные события будем обозначать большими латинскими буквами A,B,C... Достоверное событие обозначим буквой Ω, невозможное – Ø.   
     Два или несколько событий называются ***равновозможными*** в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.  
     **Пример.**При одном  бросании игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков - все это события равновозможные. Предполагается, конечно, что игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет  правильную форму.  
     Два события называются ***несовместными*** в данном испытании, если появление одного из  них исключает появление другого, и ***совместными*** в противном случае.  
     **Пример.** В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Берем  на удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти события несовместные.  
     Несколько событий образуют ***полную группу событий*** в данном испытании, если в результате этого испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.  
     **Пример.**События из примера образуют полную группу равновозможных и попарно несовместных событий.  
     Два несовместных события, образующих полную группу событий в данном испытании, называются**противоположными событиями**.  
     Если одно из них обозначено через *A*, то другое принято обозначать через http://math.immf.ru/img/641.gif (читается «не *A*»).  
     **Пример.** Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

**1.2.2. Классическое определение вероятности**

***Вероятность события*** – численная мера возможности его наступления.  
     Событие *А* называется ***благоприятствующим*** событию *В*, если всякий раз, когда наступает событие *А*, наступает и событие *В*.  
     События *А*1, *А*2, ..., *Аn* образуют ***схему случаев***, если они:  
     1) равновозможны;   
     2) попарно несовместны;   
     3) образуют полную группу.  
     В схеме случаев (и только в этой схеме) имеет место классическое  определение вероятности *P*(*A*) события *А*. Здесь случаем называют каждое из событий, принадлежащих выделенной полной группе равновозможных и попарно несовместных событий.  
     Если *n* – число всех случаев в схеме, а *m* – число случаев, благоприятствующих событию *А*, то ***вероятность события*** *А* определяется равенством:  
     http://math.immf.ru/img/642.gif  
     Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:  
     1. Вероятность достоверного события равна единице.  
     Действительно, если событие достоверно, то каждый случай в схеме случаев благоприятствует событию. В этом случае *m* = *n* и, следовательно,  
     http://math.immf.ru/img/643.gif  
     2. Вероятность невозможного события равна нулю.  
     Действительно, если событие невозможно, то ни один случай из схемы случаев не благоприятствует событию. Поэтому  *m*=0 и, следовательно,  
     http://math.immf.ru/img/644.gif  
     Вероятность случайного события есть положительное число,  заключенное между нулем и единицей.  
     Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа случаев в схеме случаев. Поэтому 0<*m*<*n*, а, значит, 0<*m*/*n*<1 и, следовательно, 0 < *P(A)* < 1.  
     Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам  
     0 ≤ *P(A)* ≤ 1.  
     В настоящее время свойства вероятности определяются в виде аксиом, сформулированных А.Н. Колмогоровым.  
     Одним из основных достоинств классического определения вероятности является возможность вычислить вероятность события непосредственно, т.е. не прибегая к опытам, которые заменяют логическими рассуждениями.

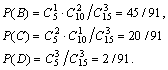
**Задачи непосредственного вычисления вероятностей**

**Задача 1.1**. Какова вероятность появления четного числа очков (событие А) при одном бросании игрального кубика?  
     **Решение**. Рассмотрим события *Аi* – выпало *i* очков, *i*= 1, 2, …,6. Очевидно, что эти события образуют схему случаев. Тогда число всех случаев *n* = 6.  Выпадению четного числа очков благоприятствуют случаи *А*2, *А*4, *А*6, т.е. *m*= 3. Тогда http://math.immf.ru/img/645.gif.  
     **Задача 1.2**. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?  
     **Решение**. Всего имеется 15 случаев, которые образуют схему случаев. Причем ожидаемому событию *А* – появлению белого шара, благоприятствуют 5 из них, поэтому http://math.immf.ru/img/646.gif.  
     **Задача 1.3**. Ребенок играет с шестью буквами азбуки: А, А, Е, К, Р, Т. Найти вероятность того, что он сможет сложить случайно слово КАРЕТА (событие А).  
     **Решение**. Решение осложняется тем, что среди букв есть  одинаковые – две буквы «А». Поэтому число всех возможных случаев в данном испытании равно числу перестановок с повторениями из 6 букв:  
     http://math.immf.ru/img/647.gif.  
     Эти случаи равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу событий, т.е. образуют схему случаев. Лишь один случай благоприятствует  событию *А*. Поэтому   
     http://math.immf.ru/img/648.gif.  
     **Задача 1.4**. Таня и Ваня договорились встречать Новый год в компании из 10 человек. Они оба очень хотели сидеть рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято места распределять путем жребия?  
     **Решение**. Обозначим через *А* событие «исполнение желания Тани и Вани». 10 человек могут усесться за стол 10! разными способами. Сколько же из этих *n* = 10! равновозможных способов благоприятны для Тани и Вани? Таня и Ваня, сидя рядом, могут занять 20 разных позиций. В то же время восьмерка их друзей может сесть за стол 8! разными способами, поэтому *m* = 20∙8!. Следовательно,   
     http://math.immf.ru/img/649.gif.  
     **Задача 1.5**. Группа из 5 женщин и 20 мужчин выбирает трех делегатов. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть выбран, найти вероятность того, что выберут двух женщин и одного мужчину.  
     **Решение**. Общее число равновозможных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать трех делегатов из 25 человек, т.е. http://math.immf.ru/img/650.gif. Подсчитаем теперь число благоприятствующих случаев, т.е. число случаев, при которых имеет место интересующее нас событие. Мужчина-делегат может быть выбран двадцатью способами. При этом остальные два делегата должны быть женщинами, а выбрать двух женщин из пяти можно http://math.immf.ru/img/651.gif. Следовательно, http://math.immf.ru/img/652.gif. Поэтому  
     http://math.immf.ru/img/653.gif.  
     **Задача 1.6.** Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам, каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой - один, а в двух остальных лунках шариков не будет.  
     Решение. Общее число случаев *n*=44. Число способов, которыми можно выбрать одну лунку, где будут три шарика, http://math.immf.ru/img/654.gif. Число способов, которыми можно выбрать лунку, где будет один шарик, http://math.immf.ru/img/655.gif. Число способов, которыми можно выбрать из четырех шариков три, чтобы положить их в первую лунку, http://math.immf.ru/img/656.gif. Общее число благоприятных случаев http://math.immf.ru/img/657.gif. Вероятность события: http://math.immf.ru/img/658.gif   
     **Задача 1.7.**В ящике 10 одинаковых шаров, помеченных номерами 1, 2, …, 10. На удачу извлечены шесть шаров. Найти вероятность того, что среди извлечённых шаров окажутся: а) шар №1; б) шары №1 и №2.  
     **Решение**. а) Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь шесть шаров из десяти, т.е.http://math.immf.ru/img/659.gif  
     Найдём число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных шести шаров есть шар №1 и, следовательно, остальные пять шаров имеют другие номера. Число таких исходов, очевидно, равно числу способов, которыми можно отобрать пять шаров из оставшихся девяти, т.е.http://math.immf.ru/img/660.gif  
     Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов: http://math.immf.ru/img/661.gif   
     б) Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных шаров есть шары №1 и №2, следовательно, четыре шара имеют другие номера), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре шаров из оставшихся восьми, т.е.http://math.immf.ru/img/662.gif Искомая вероятность http://math.immf.ru/img/663.gif

**1.2.3. Статистическая вероятность**

     Статистическое определение вероятности используется в случае, когда исходы опыта не являются равновозможными.  
     ***Относительная частота события*** *А* определяется равенством:  
     http://math.immf.ru/img/664.gif,  
     где *m* – число испытаний, в которых событие *А* наступило, *n* – общее число произведенных испытаний.  
     Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Поэтому, естественно, относительную частоту появления события при достаточно большом числе испытаний называть статистической вероятностью в отличие от ранее введенной вероятности.  
     **Пример 1.8**. Как приближенно установить число рыб в озере?  
     Пусть в озере *х* рыб. Забрасываем сеть и, допустим, находим в ней *n* рыб. Каждую из них метим и выпускаем обратно. Через несколько дней в такую же погоду и в том же месте забрасываем ту же самую сеть. Допустим, что находим в ней m рыб, среди которых *k* меченных. Пусть событие *А* – «пойманная рыба мечена». Тогда по определению относительной частоты http://math.immf.ru/img/665.gif.  
     Но если в озере *х* рыб и мы в него выпустили *n* меченых, то http://math.immf.ru/img/666.gif.  
     Так как *Р*\*(*А*) » *Р*(*А*), то http://math.immf.ru/img/667.gif.

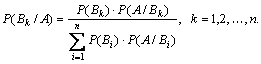
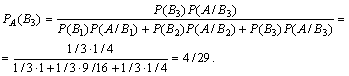
**1.2.4. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей**

**Суммой**, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий (в одном и том же испытании).  
     Сумма *А*1 + *А*2 + … + *Аn* обозначается так:  
     http://math.immf.ru/img/668.gif или http://math.immf.ru/img/669.gif.  
     **Пример**. Бросаются две игральные кости. Пусть событие *А* состоит в выпадении 4 очков на 1 кости, а событие *В* – в выпадении 5 очков на другой кости. События *А* и *В* совместны. Поэтому событие *А* +*В* состоит в выпадении 4 очков на первой кости, или 5 очков на второй кости, или 4 очков на первой кости и 5 очков на второй одновременно.  
     **Пример.** Событие*А* – выигрыш по 1 займу, событие *В* – выигрыш по 2 займу. Тогда событие *А+В* – выигрыш хотя бы по одному займу (возможно по двум сразу).  
     **Произведением** или пересечением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий (в одном и том же испытании).  
     Произведение *В* событий *А*1, *А*2, …, *Аn*обозначается так:  
     http://math.immf.ru/img/670.gif.  
     **Пример.** События *А* и *В* состоят в успешном прохождении I и II туров соответственно при поступлении в институт. Тогда событие *А×В* состоит в успешном прохождении обоих туров.  
     Понятия суммы и произведения событий имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть событие *А* есть попадание точки в область *А*, а событие *В* – попадание точки в область *В*. Тогда событие *А+В* есть попадание точки в объединение этих областей (рис. 2.1), а событие *АВ* есть попадание точки в пересечение этих областей (рис. 2.2).  
     *http://math.immf.ru/img/671.gif*  
     Рис. 2.1                              Рис. 2.2  
     **Теорема**. Если события *Ai*(*i* = 1, 2, …, *n*) попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:  
     http://math.immf.ru/img/672.gif.  
     Пусть *А* и *Ā* – противоположные события, т.е. *А + Ā* = Ω, где Ω – достоверное событие. Из теоремы сложения вытекает, что  
     Р(Ω) = *Р*(*А*) + *Р*(*Ā*) = 1, поэтому  
     *Р*(*Ā*) = 1 – *Р*(*А*).  
     Если события *А*1 и *А*2  совместны, то вероятность суммы двух совместных событий равна:  
     *Р*(*А*1 + *А*2) = *Р*(*А*1) + *Р*(*А*2) – Р(*А*1×*А*2).  
     Теоремы сложения вероятностей позволяют перейти от непосредственного подсчета вероятностей к определению вероятностей наступления сложных событий.  
     **Задача 1.8**. Стрелок производит один выстрел по мишени. Вероятность выбить 10 очков (событие *А*), 9 очков (событие *В*) и 8 очков (событие *С*) равны соответственно 0,11; 0,23; 0,17. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет менее 8 очков (событие *D*).  
     **Решение**. Перейдем к противоположному событию http://math.immf.ru/img/673.gif – при одном выстреле стрелок выбьет не менее 8 очков. Событие http://math.immf.ru/img/673.gif наступает, если произойдет *А* или *В*, или *С*, т.е. http://math.immf.ru/img/674.gif . Так как события *А, В*, *С* попарно несовместны, то, по теореме сложения,  
     http://math.immf.ru/img/675.gif, откуда http://math.immf.ru/img/676.gif.  
     **Задача 1.9**. От коллектива бригады, которая состоит из 6 мужчин и 4 женщин, на профсоюзную конференцию выбирается два человека. Какова вероятность, что среди выбранных хотя бы одна женщина (событие *А*).  
     **Решение**. Если произойдет событие *А*, то обязательно произойдет одно из следующих несовместных событий: *В* – «выбраны мужчина и женщина»; *С* – «выбраны две женщины». Поэтому можно записать: *А=В+С*. Найдем вероятность событий *В* и *С*. Два человека из 10 можно выбрать http://math.immf.ru/img/677.gif способами. Двух женщин из 4 можно выбрать http://math.immf.ru/img/678.gif способами. Мужчину и женщину можно выбрать 6 ×4 способами. Тогда http://math.immf.ru/img/679.gif. Так как события *В* и *С* несовместны, то, по теореме сложения,  
     *Р(А) = Р(В + С) = Р(В) + Р(С*) = 8/15 + 2/15 = 2/3.  
     **Задача 1.10.** На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие *А*).  
     **Решение**. Первый способ. Требование – хотя бы один из трех взятых учебников в переплете – будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: *В* – один учебник в переплете, *С* – два учебника в переплете, *D* – три учебника в переплете.  
     Интересующее нас событие *А* можно представить в виде суммы событий: *A=B+C+D*. По теореме сложения,   
     *P(A) = P(B) + P(C) + P(D).*                                     (2.1)  
     Найдем вероятность событий *B, C* и *D* (см комбинаторные схемы):  
       
     Представив эти вероятности в равенство (2.1), окончательно получим  
     *P(A)*= 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91.  
     Второй способ. Событие *А* (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и *Ā* (ни один из взятых учебников не имеет переплета) – противоположные, поэтому *P(A) + P(Ā*) = 1 (сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1). Отсюда *P(A*) = 1 – *P(Ā).* Вероятность появления события *Ā* (ни один из взятых учебников не имеет переплета)  http://math.immf.ru/img/681.gif  
     Искомая вероятность  
     *P(A*) = 1 *– P(Ā*) = 1 – 24/91 = 67/91.

**1.2.5. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей**

**Условной вероятностью** *Р(В*/*А*) называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.  
     **Теорема**. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:  
     *Р(А*∙*В) = Р(А*)∙Р(*В*/*А*).                                                  (2.2)  
     Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т.е.  
     *Р(А) = Р(А/В*) или *Р(В*) = *Р(В*/*А*).                       (2.3)  
     Если события *А* и *В* независимы, то из формул (2.2) и (2.3) следует   
     *Р(А*∙*В) = Р(А*)∙*Р(В*).                                                      (2.4)  
     Справедливо и обратное утверждение, т.е. если для двух событий выполняется равенство (2.4), то эти события независимы. В самом деле, из формул (2.4) и (2.2) вытекает   
     *Р(А*∙*В) = Р(А*)∙*Р(В*) = *Р(А*) ×*Р(В*/*А*), откуда *Р(А*) = *Р(В*/*А*).  
     Формула (2.2) допускает обобщение на случай конечного числа событий *А*1, *А*2,…,*Аn*:  
     *Р(А*1∙*А*2∙…∙*Аn*)=*Р(А*1)∙*Р(А*2/*А*1)∙*Р(А*3/*А*1*А*2)∙…∙*Р(Аn*/*А*1*А*2…*Аn*-1).  
     **Задача 1.11**. Из урны, в которой 5 белых и 10 черных шаров, вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые (событие *А*).  
     **Решение** . Рассмотрим события: *В* – первый вынутый шар белый; *С* – второй вынутый шар белый. Тогда *А = ВС*.  
     Опыт можно провести двумя способами:  
     1) с возвращением: вынутый шар после фиксации цвета возвращается в урну. В этом случае события *В* и *С*независимы:  
     *Р(А) = Р(В*)∙*Р(С*) = 5/15 ×5/15 = 1/9;  
     2) без возвращения: вынутый шар откладывается в сторону. В этом случае события *В* и *С* зависимы:  
     *Р(А) = Р(В*)∙*Р(С*/*В*).  
     Для события *В* условия прежние, http://math.immf.ru/img/682.gif, а для *С* ситуация изменилась. Произошло *В*, следовательно в урне осталось 14 шаров, среди которых 4 белых http://math.immf.ru/img/683.gif.  
     Итак, http://math.immf.ru/img/684.gif.  
     **Задача 1.12**. Среди 50 электрических лампочек 3 нестандартные. Найти вероятность того, что две взятые одновременно лампочки нестандартные.  
     **Решение** . Рассмотрим события: *А* – первая лампочка нестандартная, *В* – вторая лампочка нестандартная, *С* – обе лампочки нестандартные. Ясно, что *С = А*∙*В*. Событию *А* благоприятствуют 3 случая из 50 возможных, т.е. *Р(А*) = 3/50. Если событие *А* уже наступило, то событию *В* благоприятствуют два случая из 49 возможных, т.е. *Р(В*/*А*) = 2/49. Следовательно,   
     http://math.immf.ru/img/685.gif.  
     **Задача 1.13** . Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого спортсмена равна 0,7, а второго – 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?  
     **Решение** . Мишень будет поражена, если в нее попадет либо первый стрелок, либо второй, либо оба вместе, т.е. произойдет событие *А+В*, где событие *А* заключается в попадании в мишень первым спортсменом, а событие *В* – вторым. Тогда  
     *Р(А*+*В*)=*Р(А*)+*Р(В*)–*Р(А*∙*В*)=0, 7+0, 8–0, 7∙0,8=0,94.  
     **Задача 1.14.**В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что два учебника окажутся в переплете.  
     **Решение**. Введем обозначения событий*: A* – первый взятый учебник имеет переплет, *В* – второй учебник имеет переплет. Вероятность того, что первый учебник имеет переплет,   
     *P(A*) = 3/6 = 1/2.  
     Вероятность того, что второй учебник имеет переплет, при условии, что первый взятый учебник был в переплете, т.е. условная вероятность события *В*, такова: *P(B*/*А)* = 2/5.  
     Искомая вероятность того, что оба учебника имеют переплет, по теореме умножения вероятностей событий равна   
     *P(AB*) = *P(A*) ∙ *P(B*/*А)* = 1/2·∙ 2/5 = 0,2.  
     **Задача 1.15.** В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.  
     **Решение**. Введем обозначения событий: *A* – первым отобран мужчина, *В* – вторым отобран мужчина, *С –* третьим отобран мужчина. Вероятность того, что первым будет отобран мужчина, *P(A*) = 7/10.  
     Вероятность того, что вторым отобран мужчина, при условии, что первым уже был отобран мужчина, т.е. условная вероятность события *В* следующая*: P(B/А*) = 6/9 = 2/3.  
     Вероятность того, что третьим будет отобран мужчина, при условии, что уже отобраны двое мужчин, т.е. условная вероятность события *С* такова: *P(C*/*АВ*) = 5/8.  
     Искомая вероятность того, что все три отобранных лица окажутся мужчинами, *P(ABC) = P(A*) *P(B*/*А*) *P(C*/*АВ*) = 7/10 · 2/3 · 5/8 = 7/24.

**1.2.6. Формула полной вероятности и формула Байеса**

     Пусть *B*1, *B*2,…, *Bn* – попарно несовместные события (гипотезы) и *А* – событие, которое может произойти только совместно с одним из них.  
     Пусть, кроме того, нам известны *Р(Bi*) и *Р(А*/*Bi*) (*i* = 1, 2, …, *n*).  
     В этих условиях справедливы формулы:  
     http://math.immf.ru/img/686.gif                                         (2.5)  
            (2.6)  
     Формула (2.5) называется ***формулой полной вероятности***. По ней вычисляется вероятность события *А* (полная вероятность).  
     Формула (2.6) называется ***формулой Байеса***. Она позволяет произвести пересчет вероятностей гипотез, если событие *А* произошло.  
     При составлении примеров удобно считать, что гипотезы образуют полную группу.  
     **Задача 1.16**. В корзине яблоки с четырех деревьев одного сорта. С первого – 15% всех яблок, со второго – 35%, с третьего – 20%, с четвертого – 30%. Созревшие яблоки составляют соответственно 99%, 97%, 98%, 95%.  
     а) Какова вероятность того, что наугад взятое яблоко окажется спелым (событие *А*).  
     б) При условии, что наугад взятое яблоко оказалось спелым, вычислить вероятность того, что оно с первого дерева.  
     **Решение**. а) Имеем 4 гипотезы:  
     B1 – наугад взятое яблоко снято с 1-го дерева;  
     B2 – наугад взятое яблоко снято с 2-го дерева;  
     B3 – наугад взятое яблоко снято с 3-го дерева;  
     B4 – наугад взятое яблоко снято с 4-го дерева.  
     Их вероятности по условию: *Р(B*1) = 0,15; *Р(B*2) = 0,35; *Р(B*3) = 0,2; *Р(B*4) = 0,3.  
     Условные вероятности события *А*:  
     *Р(А*/*B*1) = 0,99; *Р(А*/*B*2) = 0,97; *Р(А*/*B*3) = 0,98; *Р(А*/*B*4) = 0,95.  
     Вероятность того, что наудачу взятое яблоко окажется спелым, находится по формуле полной вероятности:  
     *Р(А*)=*Р(B*1)∙*Р(А*/*B*1)+*Р(B*2)∙*Р(А*/*B*2)+*Р(B*3)∙*Р(А*/*B*3)+*Р(B*4)∙*Р(А*/*B*4)=0,969.  
     б) Формула Байеса для нашего случая имеет вид:  
     http://math.immf.ru/img/688.gif.  
     **Задача 1.17.** В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).  
     **Решение**. Обозначим через *А* событие – извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: *B1* – белых шаров нет, *В2* – один белый шар, *В3* – два белых шара.  
     Поскольку всего имеется три гипотезы, и сумма вероятностей гипотез равна 1 (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3,т.е.   
     *P(B*1) = *P(B*2)*= P(B*3) = 1/3.  
     Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров, *Р(А*/*B*1)=1/3. Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне был один белый шар, *Р(А*/*B*2)=2/3. Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне было два белых шара *Р(А*/*B*3)=3/ 3=1.  
     Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:   
     *Р*(*А*)=*Р(B*1)∙*Р(А*/*B*1)+*Р(B*2)∙*Р(А*/*B*2)+*Р(B*3)∙*Р(А*/*B*3)=1/3·1/3+1/3·2/3+1/3·1=2/3*.*  
     **Задача 1.18**. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.  
     **Решение**. Обозначим через *А* событие – деталь отличного качества. Можно сделать два предположения: *B1* – деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) *Р(А*/*B*1) = 2/3; *B*2 – деталь произведена вторым автоматом, причем *P(B*2) = 1/3.  
     Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом,*Р(А*/*B*1)=0,6.  
     Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом,*Р(А*/*B*1)=0,84.  
     Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна  
     *Р(А*)=*Р(B*1) ∙*Р(А*/*B*1)+*Р(B*2) ∙*Р(А*/*B*2)=2/3·0,6+1/3·0,84 = 0,68.  
     Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна  
     http://math.immf.ru/img/689.gif  
     **Задача 1.19**. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равны 20, 15, 10. Из выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Детали возвращают в партию и вторично из этой же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.  
     **Решение**. Обозначим через *А* событие – в каждом из двух испытаний (с возвращением) была извлечена стандартная деталь.  Можно сделать три предположения (гипотезы): *B*1 – детали извлекаются из первой партии, *В*2– детали извлекаются из второй партии, *В*3 – детали извлекаются из третьей партии.  
     Детали извлекались наудачу из взятой партии, поэтому вероятности гипотез одинаковы: *P(B*1) = *P(B*2) = *P(B*3) = 1/3.  
     Найдем условную вероятность *Р(А*/*B*1), т.е. вероятность того, что из первой партии будут последовательно извлечены две стандартные детали. Это событие достоверно, т.к. в первой партии все детали стандартны, поэтому *Р(А*/*B*1) = 1.  
     Найдем условную вероятность *Р(А*/*B*2), т.е. вероятность того, что из второй партии будут последовательно извлечены (с возвращением) две стандартные детали: *Р(А*/*B*2)= 15/20 ∙ 15/20 = 9/16.  
     Найдем условную вероятность *Р(А*/*B*3), т.е. вероятность того, что из третьей партии будут последовательно извлечены (с возвращением) две стандартные детали: *Р(А*/*B*3) = 10/20 · 10/20 = 1/4.  
     Искомая вероятность того, что обе извлеченные стандартные детали взяты из третьей партии, по формуле Бейеса равна   
     

**1.2.7. Повторные испытания**

     Если производится несколько испытаний, причем вероятность события *А*в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события А.* В разных независимых испытаниях событие *А*может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность.  Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие *А*имеет одну ту же вероятность.  
     Пусть производится *п*независимых испытаний, в каждом из которых событие *А*может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события *А*в каждом испытании одна и та же, а именно равна *р.*Следовательно, вероятность ненаступления события *А*в каждом испытании также постоянна и равна 1–*р.* Такая вероятностная схема называется **схемой Бернулли**. Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при *п*испытаниях по схеме Бернулли событие *А* осуществится ровно *k* раз (*k* – число успехов) и, следовательно, не осуществится *п–* раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие *А*повторилось ровно *k* раз в определенной последовательности. Искомую вероятность обозначим *Рп(k*)*.*Например, символ *Р*5(3) означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.  
     Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой **формулы Бернулли,** которая имеет вид:  
     http://math.immf.ru/img/692.gif.  
     **Задача 1.20.**Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна *р*=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.  
     **Решение.** Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна*р*=0,75. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна *q=*1–*р*=1–0,75=0,25.  
     Искомая вероятность по формуле Бернулли равна   
     http://math.immf.ru/img/693.gif.  
     **Задача 1.21**. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?  
     **Решение**. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша *р* = 1/2, следовательно, вероятность проигрыша *q* также равна 1/2. Т.к. во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлична, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.  
     Найдем вероятность того, что две партии из четырех будут выиграны:  
     http://math.immf.ru/img/694.gif  
     Найдем вероятность того, что будут выиграны три партии из шести:  
     http://math.immf.ru/img/695.gif  
     Т.к. *P*4(2) > *P*6(3), то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.  
     Однакоможно видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях *n* достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами и поэтому в процессе вычислений накапливаются погрешности; в итоге окончательный результат может значительно отличаться от истинного.  
     Для решения этой проблемы существуют несколько предельных теорем, которые используются для случая большого числа испытаний.  
     ***1. Теорема Пуассона***  
     При проведении большого числа испытаний по схеме Бернулли (при *n* => ∞) и при малом числе благоприятных исходов *k* (при этом предполагается, что вероятность успеха *p* мала), формула Бернулли приближается к формуле Пуассона  
     http://math.immf.ru/img/696.gif.  
     **Пример 1.22.** Вероятность брака при выпуске предприятием единицы продукции равна *p*=0,001. Какая вероятность, что при выпуске 5000 единиц продукции из них будет менее 4 бракованных (событие *А*).  
     **Решение.**Пусть *А*0**,***А*1**,** *А*2**,***А*3**–**события, заключающиеся в том, что будет, соответственно, 0, 1, 2 и 3 бракованных продукции из 5000 единиц. По формуле Пуассона  
     http://math.immf.ru/img/697.gif.  
     Аналогично находим   
     http://math.immf.ru/img/698.gif,  
     http://math.immf.ru/img/699.gif,  
     http://math.immf.ru/img/700.gif.  
     Откуда http://math.immf.ru/img/701.gif  
     ***2. Локальная теорема Лапласа***  
     Если вероятность *р* появления события *A* в каждом испытании по схеме Бернулли постоянна и отлична от нуля и единицы, то при большом числе испытаний *п*, вероятность *Рп(k*) появления события *A* в этих испытаниях *k* раз приближенно равна  
     http://math.immf.ru/img/702.gif.  
     Значения функцииφ(*x*)приведены в табл. П.1 приложения.  
     **Пример 1.23.**Найти вероятность того, что событие *А* наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.  
     **Решение**. Т.к. *n* велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:  
     http://math.immf.ru/img/703.gif  
     Вычислим *x*: http://math.immf.ru/img/704.gif  
     Функция http://math.immf.ru/img/705.gif – четная, поэтому φ(–1,67) = φ(1,67).  
     По таблице приложения П.1 найдем φ(1,67) = 0,0989.  
     Искомая вероятность *P*2400(1400) = 0,0989.  
     ***3. Интегральная теорема Лапласа***  
     Если вероятность *р* появления события *A* в каждом испытании по схеме Бернулли постоянна и отлична от нуля и единицы, то при большом числе испытаний *n* , вероятность *Рп(k*1*, k*2) появления события *A* в этих испытаниях от *k*1 до*k*2 раз приближенно равна  
     *Рп*(*k*1*, k*2) = Φ (*x''* ) – Φ (*x'*), где  
     http://math.immf.ru/img/706.gif– функция Лапласа,  
     http://math.immf.ru/img/707.gif  
     Определенный интеграл, стоящий в функции Лапласа не вычисляется на классе аналитических функций, поэтому для его вычисления используется табл. П.2, приведенная в приложении.  
     **Пример 1.24.**Вероятность появления события в каждом из ста независимых испытаний постоянна и равна *p* = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: a) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.  
     **Решение**. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:  
     *Рп*(*k*1*, k*2) = Φ (*x''*) – Φ(*x'*), где Ф(*x*) – функция Лапласа,  
     http://math.immf.ru/img/707.gif  
     а) По условию, *n* = 100, *p* = 0,8, *q* = 0,2, *k*1 = 75, *k*2 = 90. Вычислим *x''* и *x'* :  
     http://math.immf.ru/img/708.gif  
     http://math.immf.ru/img/709.gif  
     Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. Ф(-*x* ) = – Ф(*x*), получим  
     *P*100(75;90) = Ф (2,5) – Ф(–1,25) = Ф(2,5) + Ф(1,25).  
     По табл. П.2. приложения найдем:  
     Ф(2,5) = 0,4938; Ф(1,25) = 0,3944.  
     Искомая вероятность  
     *P*100(75; 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.  
     б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75, либо 76, …, либо 100. Т.о., в рассматриваемом случае следует принять *k*1 = 75*, k*2 = 100. Тогда  
     http://math.immf.ru/img/708.gif  
     http://math.immf.ru/img/710.gif.  
     По табл. П.2. приложения найдем Ф(1,25) = 0,3944; Ф(5) = 0,5.   
     Искомая вероятность   
     *P*100(75;100) = (5) – (–1,25) = (5) + (1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.  
     в) Событие – «*А* появилось не менее 75 раз» и «*А* появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна 1. Следовательно, искомая вероятность   
     *P*100(0;74) = 1 – *P*100(75; 100) = 1 – 0,8944 = 0,1056.